Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M

Primer Examen Parcial de Álgebra Lineal 7 de Febrero de 2005

Problema 1. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que tres. Para cada α real, se considera el subconjunto

$$U = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a + b + c + d = 0, \alpha(a + d) = 0\}$$

a) Demuestra que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y da una base de U para cada α.

b) Dado $V = \mathcal{L}\{x^3 - x, 1 + x\}$, ¿para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que $\mathbb{R}_3[x] = U \bigoplus V$?

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, se define la aplicación $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ mediante

$$\forall X \in M_2(\mathbb{R}) : f(X) = A\ X - X\ A\ .$$

Se pide:

1) Prueba que f es lineal, y halla su matriz asociada en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

2) Resuelve la ecuación matricial

$A\ X - X\ A = 0$, donde 0 representa la matriz nula cuadrada de orden 2.

Calcula el rango de f .

3) Prueba que el conjunto

$$C_A = \{X \in M_2(\mathbb{R})\ /\ A\ X = X\ A\}$$

es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (con las leyes usuales). Halla una base de C_A .

4) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2, $B = \{v_1, v_2\}$ una base de V, y h el endomorfismo de V definido mediante:

$$\begin{array}{l} h(v_1) = v_1 + 2v_2 \\ h(v_2) = 2v_1 + 4v_2 \end{array} .$$

Determina todas las aplicaciones $g \in End(V)$ tales que $h \circ g = g \circ h$. Prueba que dichos endomorfismos g definen un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (con las leyes usuales), y da una base del mismo.

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica $B_c = \{1, x, x^2\}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prueba que $B_1 = \{x^2, f(x^2), (f \circ f)(x^2)\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$ y calcula la matriz asociada a f respecto de esta base. ¿Es f un isomorfismo? Razona tu respuesta.
2. Sea la base $B_2 = \{x^2 + 2, x + 2, 2\}$. Calcula las coordenadas del polinomio $p(x) = (2 - x)^2$ en la base B_1 del apartado anterior y en la base B_2. Expresa la relación matricial entre los vectores de coordenadas del vector p en ambas bases.

Problema 4.

Una empresa juguetera artesanal produce tres modelos de juguetes: balones, rompecabezas y muñecas. En su fabricación emplea tres factores de producción: Mano de Obra, Capital (maquinaria) y Consumibles (materiales y energía). El siguiente cuadro recoge las cantidades de cada factor de producción necesarias para la fabricación de una unidad de cada tipo de juguete, expresado todo ello en unidades económicas homogéneas (ueh).

	Mano de Obra	Capital	Consumibles
Balón	14	2	6
Rompecabezas	30	4	5
Muñeca	25	5	6

Sabiendo que la empresa puede disponer al año de un máximo de 600 ueh de Mano de Obra, 100 ueh de Capital y 210 ueh de Consumibles, y que el beneficio obtenido por juguete producido es de 2 ueh por cada balón, de 4 ueh por cada rompecabezas y de 4 ueh por cada muñeca:

a) [**8 Ptos.**] calcula por el método del Simplex el programa de producción anual (cantidad de balones, de rompecabezas y de muñecas) que maximiza el beneficio de la empresa e indica cuál es el beneficio máximo que se consigue con ese programa.

b) [**2 Ptos.**] interpreta el resultado, determinando el grado de utilización de cada factor de producción respecto al total disponible (%).

- Cada ejercicio debe responderse en hojas separadas.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.
- No está permitido el uso de libros, calculadoras o apuntes.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.

Una solución al examen

Problema 1. a) Si $\alpha = 0: \ U = \{ax^3 + bx^2 + cx - (a+b+c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $\dim U = 3$.

Si $\alpha \neq 0: \ U = \{ax^3 + bx^2 - bx - a, \forall a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\dim U = 2$.

Dado que todos los polinomios de U son polinomios de $\mathbb{R}_3[x]$, U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ si es cerrado frente a las combinaciones lineales.

Caso $\alpha = 0:$

$\forall p, q \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda p + \mu q = \lambda(a_p x^3 + b_p x^2 + c_p x - (a_p + b_p + c_p)) + \mu(a_q x^3 + b_q x^2 + c_q x - (a_q + b_q + c_q)) = (\lambda a_p + \mu a_q)x^3 + (\lambda b_p + \mu b_q)x^2 + (\lambda c_p + \mu c_q)x - ((\lambda a_p + \mu a_q) + (\lambda b_p + \mu b_q) + (\lambda c_p + \mu c_q)) = ax^3 + bx^2 + cx - (a+b+c) \in U$.

Caso $\alpha \neq 0:$

$\forall p, q \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \lambda p + \mu q = \lambda(a_p x^3 + b_p x^2 - b_p x - a_p) + \mu(a_q x^3 + b_q x^2 - b_q x - a_q) = (\lambda a_p + \mu a_q)x^3 + (\lambda b_p + \mu b_q)x^2 - (\lambda b_p + \mu b_q)x - (\lambda a_p + \mu a_q) = ax^3 + bx^2 - bx - a \in U$.

U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Podemos escribir $V = \{\sigma x^3 + (\tau - \sigma)x + \tau, \forall \sigma, \tau \in \mathbb{R}\}$ y $\dim V = 2$.

Para $\alpha = 0$, no hay compatibilidad dimensional para la suma directa: $\dim U + \dim V > \dim \mathbb{R}_3[x]$.

Para $\alpha \neq 0$, $\dim U + \dim V = \dim \mathbb{R}_3[x]$ y para que la suma sea directa basta que $U + V = \mathbb{R}_3[x]$ (equivalente a $U \cap V = \{0\}$), o lo que es lo mismo $B_U \cup B_V = B_{\mathbb{R}_3[x]}$.

Tomemos, expresadas en la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$, $B_c = \{x^3, x^3, x, 1\}$, $B_U = \{(1,0,0,-1), (0,1,-1,0)\}$ y $B_V = \{(1,0,-1,0), (0,0,1,1)\}$. Por operaciones elementales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

y $B_U \cup B_V$ es un sistema libre base de $\mathbb{R}_3[x]$, luego $U \bigoplus V = \mathbb{R}_3[x], \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 2.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - 2x_2 & -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 - 2x_4 & 2x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

y f es lineal.

$$M\left(f, B_c^{M_2(\mathbb{R})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$ las columnas de M son los transformados mediante f de los vectores de la base canónica de $M_2(\mathbb{R}):\ B_c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Las raíces de $A\,X - X\,A = 0$ son las matrices X del núcleo de f.
Calculemos el núcleo por operaciones elementales

$$
\begin{array}{cccc}
0 & -2 & 2 & 0 \\
-2 & -3 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 3 & -2 \\
0 & 2 & -2 & 0 \\
- & - & - & - \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc}
-2 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -2 & -3 & 2 \\
0 & 2 & 3 & -2 \\
2 & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc}
-2 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - \\
0 & 1 & -3/2 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$\ker f = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}-3/2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ y $\operatorname{rg} f = 2, \left(\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right\}\right)$.

c) $C_A = \{X \in M_2(\mathbb{R}) / A\,X = X\,A\} \equiv \{X \in M_2(\mathbb{R}) / A\,X - X\,A = 0\} \equiv \ker f \equiv \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}-3/2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.

C_A es el espacio vectorial de las combinaciones lineales de $\begin{bmatrix}-3/2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, luego es subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

4) h, en la base B, tiene como matriz a $A = M(h, B) = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$. Si $X = M(g, B)$ es la matriz, en la base B, de una aplicación g que verifica $h \circ g = g \circ h$, entonces $A\ X = X\ A$ o bien $A\ X - X\ A = 0$, y el conjunto $G = \{g \in End(V) : h \circ g = g \circ h\}$, expresado en la base canónica, con el conjunto de soluciones X de la ecuación matricial $A\ X - X\ A = 0$, C_A, y también con el núcleo de la aplicación $f(X) = A\,X - X\,A$.

G es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial (apartados 2) y 3) anteriores) y una base de G es $\{g_1, g_2\}$ cuyas matrices en B son $g_1 = \begin{bmatrix}-3/2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\left(\begin{cases} g_1(v_1) = -3/2v_1 + v_2, \\ g_1(v_2) = v_1, \end{cases}\right.$ y $\left.\begin{cases} g_2(v_1) = v_1, \\ g_2(v_2) = v_2. \end{cases}\right)$.

Problema 3. $x^2|_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$f(x^2)|_{B_c} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(f \circ f) f(x^2)|_{B_c} = f(f(x^2))|_{B_c} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Probamos por operaciones elementales que $\{(0,0,1), (-1,0,1), (-3,1,-2)\}$ forman un sistema libre y, en consecuencia, que $B_1 = \{x^2, -1+x^2, -3+x-x^2\}$ es base de $\mathbb{R}^2[x]$.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

y este último $\{-1+x^2, x-5x^2, x^2\}$ es un sistema equivalente libre.

2) Sean $p|_{B_c} = V$, $p|_{B_1} = V_1$ y $p|_{B_2} = V_2$. Sabemos que $V = P_1\, V_1 = P_2\, V_2$ siendo P_1 la matriz de paso de B_c a B_1 $\left(P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$ y P_2 la matriz de paso de B_c a B_2 $\left(P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$, luego $V_2 = P_2^{-1}\, P_1\, V_1$ o bien $V_1 = P_1^{-1}\, p_2\, V_2$.

Calculamos por operaciones elementales P_1^{-1} y P_2^{-1}:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & P_1 & & & & \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} & & & & P_1^{-1} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & P_2 & & & & \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} & & & & P_1^{-1} & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1 \end{array}$$

$$V_1 = P_1^{-1} V = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad V_2 = P_2^{-1} V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La relación anteriormente expuesta $V_2 = P_2^{-1}\ P_1\ V_1$ se puede escribir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Problema 4. a) El programa lineal, que resuelve el problema, en su forma canónica es

$$\text{Max.} \quad f(x,y,z) = 2x + 4y + 4z \qquad \text{(función objetivo)}$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{aligned} 2x + 4y + 5z &\leq 100 \\ 14x + 30y + 25z &\leq 600 \\ 6x + 5y + 6z &\leq 210 \end{aligned} \qquad \text{(restricciones tecnológicas)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \qquad \text{(restricciones de no negatividad)}$$

representando por x la cantidad de balones, por y la cantidad de rompecabezas y por z la cantidad de muñecas en el programa de producción.

El programa lineal, en su forma estándar, es

$$\text{Max.} \quad f(x,y,z) = 2x + 4y + 4z \qquad \text{(función objetivo)}$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{aligned} 2x + 4y + 5z + h_1 \qquad\qquad &= 100 \\ 14x + 30y + 25z \quad + h_2 \quad &= 600 \\ 6x + 5y + 6z \qquad\quad + h_3 &= 210 \end{aligned} \qquad \text{(restricciones tecnológicas)}$$

$$x, y, z, h_1, h_2, h_3 \geq 0 \qquad \text{(restricciones de no negatividad)}$$

donde h_1, h_2, h_3 son las variables de holgura.

El problema se resuelve por el método del Simplex:

Primer cuadro del Simplex:

		x	y	z	h_1	h_2	h_3	$f(X)$	/
	f	-2	-4	-4	0	0	0	0	
	h_1	2	4	5	1	0	0	100	25
$\Leftarrow$	h_2	14	$\boxed{30}$	25	0	1	0	600	20
	h_3	6	5	6	0	0	1	210	42
			$\Uparrow$						

Segundo cuadro del Simplex:

		x	y	z	h_1	h_2	h_3	$f(X)$	/
	f	-2/15	0	-2/3	0	2/15	0	80	
$\Leftarrow$	h_1	2/15	0	$\boxed{5/3}$	1	-2/15	0	20	12
	y	7/15	1	5/6	0	1/30	0	20	24
	h_3	11/3	0	11/6	0	-1/6	1	110	60
				$\Uparrow$					

Tercer cuadro del Simplex:

		x	y	z	h_1	h_2	h_3	$f(X)$	/
	f	-2/25	0	0	2/5	2/25	0	88	
	z	2/25	0	1	3/5	-2/25	0	12	150
	y	2/5	1	0	-1/2	2/15	0	10	25
$\Leftarrow$	h_3	$\boxed{88/25}$	0	0	-11/10	-1/50	1	88	25
				$\Uparrow$					

Cuarto cuadro del Simplex:

	x	y	z	h_1	h_2	h_3	$f(X)$
f	0	0	0	3/8	7/88	1/44	90
z	0	0	1	5/8	-7/88	-1/44	10
y	0	1	0	-3/8	179/1320	-5/44	0
x	1	0	0	-5/16	-1/176	25/88	25

Como se trata de un problema de maximización y no existe ningún coeficiente negativo en la fila f, el Simplex se ha terminado. El programa de producción consiste en la fabricación de 25 balones y 10 muñecas (no se fabrican rompecabezas) y el beneficio generado por este programa es 90 ueh.

b)

Cuadro de utilización de los factores de producción:

Factor de producción	Disponibilidad	Utilización	Grado de utilización(%)
Mano de Obra	600	600	100,00
Capital	100	100	100,00
Consumibles	210	210	100,00

Se utiliza la totalidad de los recursos disponibles.